Bab 1 : Ubahan

by : rraezzz

1.1 UBAHAN LANGSUNG

- Ubahan langsung menerangkan perkaitan antara dua pemboleh ubah, dengan keadaan apabila satu pemboleh ubah y bertambah maka pemboleh ubah x juga bertambah pada kadar yang sama dan sebaliknya
- Hubungan ini juga ditulis sebagai y berubah berubah secara langsung dengan x

CONTOH

Jumlah gaji seorang pekerja sambilan sebagai jurujual berubah secara langsung dengan bilangan jam dia bekerja

Nyatakan perubahan pada

a) Jumlah gaji jika bilangan jam bertambah dua kali ganda,
b) Jumlah gaji jika bilangan jam berkurang sebanyak 50%
c) Bilangan jam bekerja jika jumlah gaji yang diterima adalah separuh daripada gaji asal

PENYELESAIAN

a) Jumlah gaji bertambah dua kali ganda,
b) Jumlah gaji berkurang sebanyak 50%
c) Bilangan jam bekerja adalah separuh daripada gaji asal

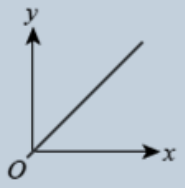
HUBUNGAN ANTARA DUA PEMBOLEH UBAH BAGI SUATU UBAHAN LANGSUNG

Hasil daripada Mobilisasi Minda 2, didapati bahawa bagi suatu ubahan langsung,

(a) nilai $\frac{y}{x}$ ialah pemalar,

(b) graf y melawan x ialah satu garis lurus yang melalui asalan,

(c) pemboleh ubah y berubah secara langsung dengan pemboleh ubah x.



Bab 1 : Ubahan

by : rraezzz

Bagi suatu ubahan langsung, y berubah secara langsung dengan x boleh ditulis sebagai

$y \propto x$ (hubungan ubahan)
$y = kx$ (bentuk persamaan)

dengan keadaan k ialah pemalar.

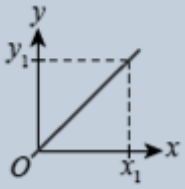
Perkaitan antara nilai k dengan konsep perkadaran:

y	y_1	y_2	y_3	y_4
x	x_1	x_2	x_3	x_4

$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4}$$

Perkaitan antara nilai k dengan kecerunan garis lurus yang melalui asalan:

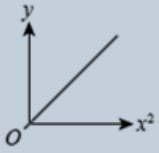
Kecerunan,
$m = \frac{y_1}{x_1}$
$= k$



Perkaitan ini hanya benar jika garis lurus melalui asalan.

Hasil daripada Mobilisasi Minda 3, didapati bahawa bagi suatu ubahan langsung,

(a) nilai $\frac{y}{x^2}$ ialah pemalar. Oleh itu, $k = \frac{y}{x^2}$,
(b) graf y melawan x^2 ialah satu garis lurus yang melalui asalan,
(c) pemboleh ubah y berubah secara langsung dengan pemboleh ubah x^2.



Secara umumnya,

Bagi suatu ubahan langsung, y berubah secara langsung dengan x^n, boleh ditulis sebagai

$y \propto x^n$ (hubungan ubahan)
$y = kx^n$ (bentuk persamaan)

dengan keadaan $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ dan k ialah pemalar.

Graf y melawan x^n ialah satu garis lurus yang melalui asalan dengan k ialah kecerunan garis lurus.

Minda Kritis

Dalam Mobilisasi Minda 3, apakah perkaitan antara nilai π dengan $\frac{y}{x^2}$?

TIP Bestari

$y \propto x$ adalah benar jika dan hanya jika $n = 1$.

Bab 1 : Ubahan

by : rraezzz

Contoh 2

Sebuah kereta mainan bergerak daripada keadaan pegun. Jarak yang dilalui oleh kereta mainan itu, y, berubah dengan masa, t, seperti yang ditunjukkan dalam jadual di bawah.

Masa, t (s)	2	4	6	8	10	12
Jarak, y (cm)	14	28	42	56	70	84

Medan Interaktif

Apabila $y = 3x^2$, y tidak berubah secara langsung dengan x. Bincangkan.

Tentukan sama ada y berubah secara langsung dengan t atau t^2. Seterusnya, tuliskan hubungan tersebut dalam bentuk ubahan.

Penyelesaian:

t	2	4	6	8	10	12
y	14	28	42	56	70	84
$\frac{y}{t}$	$\frac{14}{2} = 7$	$\frac{28}{4} = 7$	$\frac{42}{6} = 7$	$\frac{56}{8} = 7$	$\frac{70}{10} = 7$	$\frac{84}{12} = 7$
$\frac{y}{t^2}$	$\frac{14}{2^2} = 3.50$	$\frac{28}{4^2} = 1.75$	$\frac{42}{6^2} = 1.17$	$\frac{56}{8^2} = 0.88$	$\frac{70}{10^2} = 0.70$	$\frac{84}{12^2} = 0.58$

y berubah secara langsung dengan t kerana nilai $\frac{y}{t}$ ialah pemalar. Maka, $y \propto t$.

y tidak berubah secara langsung dengan t^2 kerana nilai $\frac{y}{t^2}$ bukan pemalar.

Contoh 3

(a) Dengan melukis graf y melawan x, tentukan sama ada y berubah secara langsung dengan x atau tidak.

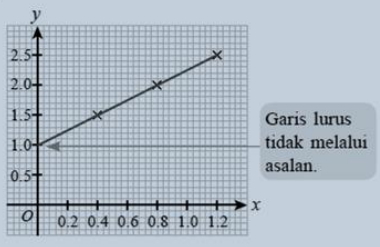
x	0.4	0.8	1.2
y	1.5	2.0	2.5

(b) Dengan melukis graf y melawan x^2, tentukan sama ada y berubah secara langsung dengan x^2 atau tidak.

x	2	3	4	5
y	8	18	32	50

Penyelesaian:

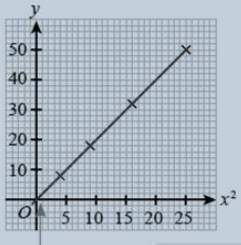
(a)



Garis lurus tidak melalui asalan.

Maka, y tidak berubah secara langsung dengan x.

(b)



x^2	y
4	8
9	18
16	32
25	50

Garis lurus melalui asalan.

Maka, y berubah secara langsung dengan x^2.

Bab 1 : Ubahan

by : rraezzz

Contoh 4

Diberi $m = 0.8$ apabila $n = 0.125$. Ungkapkan m dalam sebutan n jika

(a) m berubah secara langsung dengan n,

(b) m berubah secara langsung dengan punca kuasa tiga n.

Penyelesaian:

(a) $m \propto n$

$m = kn$ ← Tuliskan hubungan dalam bentuk persamaan.

$0.8 = k(0.125)$ ← Gantikan nilai m dan nilai n ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai k.

$k = \dfrac{0.8}{0.125}$

$= 6.4$

Maka, $m = 6.4n$

(b) $m \propto \sqrt[3]{n}$

$m = k\sqrt[3]{n}$

$0.8 = k(\sqrt[3]{0.125})$

$k = \dfrac{0.8}{\sqrt[3]{0.125}}$

$= 1.6$

Maka, $m = 1.6\sqrt[3]{n}$

Contoh 5

Pemanjangan spring, x cm, berubah secara langsung dengan jisim pemberat, w g, yang ditanggungnya. Diberi bahawa pemanjangan spring ialah 3 cm apabila diletakkan pemberat sebanyak 200 g. Ungkapkan x dalam sebutan w.

Penyelesaian:

$x \propto w$

$x = kw$ ← Tuliskan hubungan dalam bentuk persamaan.

$3 = k(200)$ ← Gantikan nilai x dan nilai w ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai k.

$k = \dfrac{3}{200}$

$= 0.015$

Maka, $x = 0.015w$

Bab 1 : Ubahan

by : rraezzz

Secara umumnya,

Bagi suatu **ubahan tercantum**, y berubah secara tercantum dengan x^m dan z^n boleh ditulis sebagai

$y \propto x^m z^n$ (hubungan ubahan)

$y = kx^m z^n$ (bentuk persamaan)

dengan keadaan $m = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ dan k ialah pemalar.

TiP Bestari

$y \propto xz$ ialah cantuman dua hubungan $y \propto x$ dan $y \propto z$.

Minda Kritis

Bincangkan hubungan bagi persamaan faedah mudah, $I = Prt$.

Contoh 9

Tuliskan hubungan dengan menggunakan simbol $\propto$ dan persamaan bagi setiap yang berikut.

(a) p berubah secara langsung dengan q dan $\sqrt{r}$.

(b) y berubah secara langsung dengan kuasa dua w dan kuasa tiga x.

(c) Isi padu prisma, V berubah secara langsung dengan luas keratan rentas, A dan tingginya, h.

(d) Jisim, w bagi sebatang besi berbentuk silinder berubah secara langsung dengan panjang, p dan kuasa dua diameter tapaknya, d.

TiP Bestari

$y \propto xz$ boleh dibaca sebagai
- y berubah secara langsung dengan x dan z
- y berubah secara tercantum dengan x dan z
- y berkadaran secara tercantum terhadap x dan z

Penyelesaian:

(a) $p \propto q\sqrt{r}$ ← $p \propto q$ dan $p \propto \sqrt{r}$

$p = kq\sqrt{r}$

(b) $y \propto w^2x^3$ ← $y \propto w^2$ dan $y \propto x^3$

$y = kw^2x^3$

(c) $V \propto Ah$ ← $V \propto A$ dan $V \propto h$

$V = kAh$

(d) $w \propto pd^2$ ← $w \propto p$ dan $w \propto d^2$

$w = kpd^2$

Contoh 10

Diberi bahawa $x \propto y^2z$, ungkapkan x dalam sebutan y dan z jika $x = 6$ apabila $y = 3$ dan $z = 5$.

Penyelesaian:

$x \propto y^2z$

$x = ky^2z$ ← Tuliskan hubungan dalam bentuk persamaan.

$6 = k(3)^2(5)$ ← Gantikan nilai-nilai x, y dan z ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai k.

$k = \frac{6}{(3)^2(5)}$

$= \frac{2}{15}$

Maka, $x = \frac{2}{15}y^2z$

Bab 1 : Ubahan

by : rraezzz

1.2 UBAHAN SONGSANG

- Dalam ubahan songsang, pemboleh ubah y bertambah apabila pemboleh ubah x berkurang pada kadar yang sama dan sebaliknya
- Hubungan ini juga ditulis sebagai y berubah secara songsang dengan x

CONTOH

Chia Ming mengambil bahagian dalam satu larian maraton dengan jarak 42 km. Jadual di bawah menunjukkan hubungan antara masa yang diambil oleh Chia Ming dengan laju puratanya.

Masa, t (jam)	4	5	6	7	8
Laju purata, v (km/j)	10.50	8.40	7.00	6.00	5.25

Nyatakan perubahan pada laju purata jika masa yang diambil
(a) bertambah dua kali ganda,
(b) berkurang 1.5 kali ganda.

Penyelesaian:

(a)

t	v
4	10.50
8	5.25

× 2 ↓ ÷ 2

Apabila masa bertambah dua kali ganda, maka laju purata berkurang dua kali ganda.

(b)

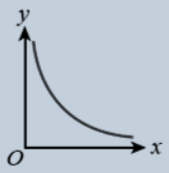
t	v
6	7.00
4	10.50

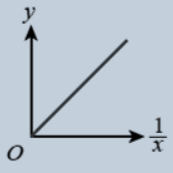
÷ 1.5 ↓ × 1.5

Apabila masa berkurang 1.5 kali ganda, maka laju purata bertambah 1.5 kali ganda.

HUBUNGAN ANTARA DUA PEMBOLEH UBAH BAGI SUATU UBAHAN SONGSANG

Hasil daripada Mobilisasi Minda 6, didapati bahawa bagi suatu ubahan songsang,
(a) nilai xy ialah pemalar. Oleh itu, $k = xy$,
(b) graf y melawan x ialah hiperbola dan graf y melawan $\frac{1}{x}$ ialah satu garis lurus yang bermula daripada asalan,
(c) y berubah secara songsang dengan x.





Bab 1 : Ubahan

by : rraezzz

Perkaitan antara nilai k dengan konsep perkadaran:

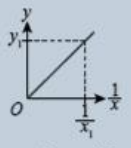
y	y_1	y_2	y_3	y_4
x	x_1	x_2	x_3	x_4

$k = x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = x_4y_4$

Perkaitan antara nilai k dengan kecerunan garis lurus yang bermula daripada asalan bagi graf y melawan $\frac{1}{x}$:

Kecerunan,

$$m = \frac{y_1}{\frac{1}{x_1}}$$
$$= x_1y_1$$
$$= k$$



Perkaitan ini hanya benar jika garis lurus bermula daripada asalan.

TIP Bestari

Hubungan ubahan songsang yang ditulis sebagai 'y berubah secara songsang dengan x' juga boleh ditulis sebagai 'x dan y berkadaran songsang'.

Maka, kita boleh menghubungkan dua pemboleh ubah x dan y dalam bentuk persamaan, iaitu

$$xy = k$$
$$y = \frac{k}{x}.$$

Bagi suatu ubahan songsang, y berubah secara songsang dengan x boleh ditulis sebagai

$$y \propto \frac{1}{x} \text{ (hubungan ubahan)}$$
$$y = \frac{k}{x} \text{ (bentuk persamaan)}$$

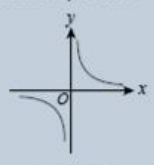
dengan keadaan k ialah pemalar.

(a) Graf y melawan x ialah hiperbola.

(b) Graf y melawan $\frac{1}{x}$ ialah graf garis lurus yang bermula daripada asalan ($x \neq 0$).

KOTAK MEMORI

$y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$ ialah fungsi salingan dengan graf berbentuk hiperbola.

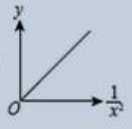


Hasil daripada Mobilisasi Minda 7, didapati bahawa bagi suatu ubahan songsang,

(a) nilai x^2y ialah pemalar. Oleh itu, $k = x^2y$,

(b) graf y melawan $\frac{1}{x^2}$ ialah satu garis lurus yang bermula daripada asalan,

(c) y berubah secara songsang dengan x^2.



Secara umumnya,

Bagi suatu ubahan songsang, y berubah secara songsang dengan x^n boleh ditulis sebagai

$y \propto \frac{1}{x^n}$ (hubungan ubahan)

$y = \frac{k}{x^n}$ (bentuk persamaan)

dengan keadaan $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ dan k ialah pemalar.

Graf y melawan $\frac{1}{x^n}$ ialah satu garis lurus yang bermula daripada asalan ($x \neq 0$) dengan k ialah kecerunan garis lurus.

Medan Interaktif

Apabila $y = \frac{1}{x^2}$, y tidak berubah secara langsung dengan x. Bincangkan.

TIP Bestari

$y \propto \frac{1}{x}$ adalah benar jika dan hanya jika $n = 1$.

Bab 1 : Ubahan

by : rraezzz

Contoh 16

Diberi masa, t, yang diperlukan untuk menyiapkan kerja pemasangan perabot berubah secara songsang dengan bilangan pekerja, x. Jadual di bawah menunjukkan hubungan antara x dengan t.

Bilangan pekerja, x	2	3	4	5	6
Masa diperlukan, t (minit)	180	120	90	72	60

Dengan mengira nilai xt dan x^2t, tentukan sama ada t berubah secara songsang dengan x atau x^2. Kemudian, tuliskan hubungan tersebut dengan menggunakan simbol $\propto$.

Penyelesaian:

x	2	3	4	5	6
t	180	120	90	72	60
xt	$2(180) = 360$	$3(120) = 360$	$4(90) = 360$	$5(72) = 360$	$6(60) = 360$
x^2t	$2^2(180) = 720$	$3^2(120) = 1080$	$4^2(90) = 1440$	$5^2(72) = 1800$	$6^2(60) = 2160$

Nilai xt ialah pemalar, manakala nilai x^2t bukan pemalar. Maka, t berubah secara songsang dengan x, iaitu $t \propto \frac{1}{x}$.

Diberi p berubah secara songsang dengan q. Jika $p = 2$ apabila $q = 7$, hitung nilai p apabila $q = 1.6$.

Penyelesaian:

$p \propto \frac{1}{q}$

$p = \frac{k}{q}$

$2 = \frac{k}{7}$

$k = 2(7)$
$= 14$

Maka, $p = \frac{14}{q}$

Apabila $q = 1.6$,

$p = \frac{14}{1.6}$
$= 8.75$

Langkah Alternatif:

Menggunakan konsep perkadaran:
Diberi $p_1 = 2$, $q_1 = 7$, $q_2 = 1.6$

$p_1 q_1 = p_2 q_2$

$2 \times 7 = p_2 \times 1.6$

$p_2 = \frac{2 \times 7}{1.6}$

$= 8.75$

Diberi $x = 0.25$ apabila $y = 3$. Ungkapkan y dalam sebutan x jika
(a) y berubah secara songsang dengan x,
(b) y berubah secara songsang dengan punca kuasa dua x.

Penyelesaian:

(a) $y \propto \frac{1}{x}$

$y = \frac{k}{x}$ ← Tuliskan hubungan dalam bentuk persamaan.

$3 = \frac{k}{0.25}$ ← Gantikan nilai y dan nilai x ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai k.

$k = 3(0.25)$
$= 0.75$

Maka, $y = \frac{0.75}{x}$

(b) $y \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$

$y = \frac{k}{\sqrt{x}}$

$3 = \frac{k}{\sqrt{0.25}}$

$k = 3(\sqrt{0.25})$
$= 1.5$

Maka, $y = \frac{1.5}{\sqrt{x}}$

Bab 1 : Ubahan

by : rraezzz

1.3 UBAHAN BERGABUNG

➢ **Ubahan bergabung melibatkan gabungan ubahan langsung atau ubahan tercantum, dan ubahan songsang**

Hasil daripada Mobilisasi Minda 8, didapati bahawa, y berubah secara langsung dengan x, dan y berubah secara songsang dengan z. Maka, y adalah berubah secara langsung dengan x dan secara songsang dengan z, iaitu $y \propto \frac{x}{z}$.

Secara umumnya,

Bagi suatu **ubahan bergabung**, y berubah secara langsung dengan x^m dan secara songsang dengan z^n, boleh ditulis sebagai

$y \propto \frac{x^m}{z^n}$ (hubungan ubahan)

$y = \frac{kx^m}{z^n}$ (bentuk persamaan)

dengan keadaan $m = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ dan k ialah pemalar.

Contoh 22

Diberi bahawa y berubah secara langsung dengan kuasa dua x dan secara songsang dengan punca kuasa dua z. Jika $y = 8$ apabila $x = 4$ dan $z = 36$, ungkapkan y dalam sebutan x dan z.

Penyelesaian:

$y \propto \frac{x^2}{\sqrt{z}}$

$y = \frac{kx^2}{\sqrt{z}}$ ← Tuliskan hubungan antara y, x dan z dalam bentuk persamaan.

$8 = \frac{k(4)^2}{\sqrt{36}}$ ← Gantikan nilai-nilai y, x dan z ke dalam persamaan untuk mendapatkan nilai k.

$k = \frac{8\sqrt{36}}{4^2}$

$= 3$

Maka, $y = \frac{3x^2}{\sqrt{z}}$

TiP Bestari

(i) y berubah secara langsung dengan w dan kuasa tiga x, dan secara songsang dengan punca kuasa tiga z,

$$y \propto \frac{wx^3}{\sqrt[3]{z}}$$

(ii) y berubah secara langsung dengan hasil darab w^2 dan $\sqrt{x}$, dan secara songsang dengan z^3,

$$y \propto \frac{w^2\sqrt{x}}{z^3}$$

Bab 1 : Ubahan

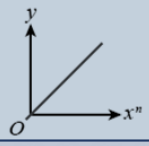
by : rraezzz

KESIMPULAN

Ubahan Langsung

y berubah secara langsung dengan x^n, bagi $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

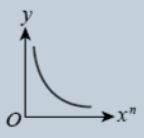
- $y \propto x^n$
- $y = kx^n$ dengan keadaan k ialah pemalar dan $k = \frac{y}{x^n}$
- Graf y melawan x^n ialah satu garis lurus yang melalui asalan

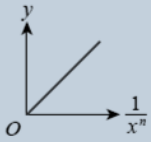


Ubahan Songsang

y berubah secara songsang dengan x^n, bagi $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

- $y \propto \frac{1}{x^n}$
- $y = \frac{k}{x^n}$ dengan keadaan k ialah pemalar dan $k = yx^n$
- Graf y melawan $\frac{1}{x^n}$ ialah satu garis lurus yang bermula daripada asalan $(x \neq 0)$





y berubah secara songsang dengan x^n

Ubahan Tercantum

Satu ubahan langsung dengan keadaan satu pemboleh ubah berubah sebagai hasil darab dua atau lebih pemboleh ubah yang lain.

- y berubah secara tercantum dengan x^m dan z^n, bagi $m = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ dan $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
- $y \propto x^m z^n$
- $y = kx^m z^n$ dengan keadaan k ialah pemalar dan $k = \frac{y}{x^m z^n}$

Ubahan Bergabung

Melibatkan gabungan ubahan langsung atau ubahan tercantum, dan ubahan songsang.

- Bagi $p = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, $q = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ dan $r = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

(i) $y \propto \frac{x^p}{z^q}$

$y = \frac{kx^p}{z^q}$

(ii) $y \propto \frac{w^p x^q}{z^r}$

$y = \frac{kw^p x^q}{z^r}$

dengan keadaan k ialah pemalar.